Dioptrische Bilder

von sehr kleinen paraxialen Objecten

in

centrierten sphärischen Flächensystemen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der hohen philosophischen Facultät

der Landes-Universität Rostock

vorgelegt

von

Curd Winter,

Regierungsbauführer

aus Blankenburg a./H.

Kiel.

Druck von C. Schaidt.

1897.

Dioptrische Bilder

von sehr kleinen paraxialen Objecten

in

centrierten sphärischen Flächensystemen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der hohen philosophischen Facultät

der Landes-Universität Rostock

vorgelegt

von

Curd Winter,

Regierungsbauführer

aus Blankenburg a./H.

Kiel.

Druck von C. Schaidt.

1897.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552726_0079

Einleitung.

In den Werken über darstellende Optik, über Ophthalmologie und in allen Lehrbüchern der Physik bleiben die dioptrischen Betrachtungen — mögen sie rein analytischer oder graphischer (constructiver) Natur sein — hinsichtlich der Untersuchungen der durch Systeme brechender Flächen erzeugten Bilder von Objecten auf die einfachsten Verhältnisse und geometrischen Gebilde des Punktes und der senkrecht zur optischen Axe gerichteten geraden Linie, z. B. eines Pfeiles beschränkt.

Diese Einschränkung entspricht jedoch in den seltensten Fällen der Anwendung, welche die Dioptrik vorzüglich im praktischen Leben gefunden hat, indem bekanntlich die künstlichen optischen Instrumente — Systeme von centrierten, sphärisch geschliffenen Linsen — wie die Fernrohre fast ausschliesslich dazu dienen, Bilder von Gegenständen zu entwerfen, welche eine räumliche, auch in der Seh-Richtung eine Tiefen-Ausdehnung besitzen.

Ohnedem liegt es schon im Interesse der optischen Wissenschaft als solcher, durch Erweiterung des bisherigen Rahmens abzubildender Objecte, eine Aufklärung darüber zu bringen, in welcher Weise sich allgemein beliebig gerichtete Linien, ferner eine Ebene, Kurven und Flächen abbilden, und mathematisch festzustellen, nach welchen Gesetzen sich diese Abbildung vollzieht.

Wir haben im Folgenden den Versuch gemacht, in dieser Hinsicht einige neue Gesichtspunkte zu eröffnen.

§ 1.

Unterscheidung der dioptrischen Abbildungsmethode von anderen Abbildungsmethoden.

Der Gebrauch eines einfachen dioptrischen Instruments, beispielsweise eines Feldstechers, lehrt, dass die Bilder räumlicher Objecte nicht mehr eben ausfallen; denn betrachten wir mit einem solchen Glase eine Gegend oder eine Theaterbühne von nicht zu kleiner Tiefe, so sind wir gezwungen, das Ocular mehrfach longitudinal zu verschieben, gewissermassen mit seinem Brennpunkt auf die einzelnen Partien des durch das Objectiv erzeugten, im Rohr befindlichen Bildes »umherzutasten«, wenn sie für unser Auge deutlich sichtbar sein sollen; wir können nur nacheinander das gesammte Bild scharf sehen.

Aus diesem Grunde lässt sich die dioptrische Abbildungsmethode nicht mit den bekannten, für körperliche Objecte benutzten Abbildungsweisen, wie der Parallelprojection und der Perspective (Centralprojection) in Vergleich bringen, da hier die auf einer Tafel entworfenen Bilder keine Tiefenausdehnung erhalten; wie die folgenden Betrachtungen zeigen, entspricht sie auch der Abbildungsmethode nicht, welche die darstellende Geometrie unter den Namen Reliefperspective kennt, wenn diese auch mit der dioptrischen Abbildungsweise das gemeinsam hat, einen Raum wieder räumlich abzubilden: die zwischen Object und Bild bestehenden mathematischen Relationen beider Methoden sind principiell von einander verschiedene.

Wir werden sehen, in wiefern die dioptrische Abbildung ganz besonderen, bisher nicht bekannten Gesetzen unterliegt.

§ 2.

Grundbegriffe der descriptiven Dioptrik: Die Gauss'schen Prämissen. — Das allgemeine dioptrische Problem. — Die Cardinalpunkte.

Nach dem Vorgange von Gauss werden allen dioptrischen Untersuchungen gewisse beschränkende Voraussetzungen zu Grunde gelegt, welche den in Betracht kommenden Verhältnissen entsprechend, erwiesenermassen als zulässig zu erachten sind, andererseits wegen der hierdurch erzielten Vereinfachung in den Fundamentalgleichungen — den Relationen zwischen conjugierten Punkten — eine fast notwendige Vorbedingung für alle tiefer in Specialgebiete der Dioptrik eindringenden Studien bildet.

Von diesen Prämissen kommen für unsere Arbeit zwei besonders in Betracht:

1. Das System brechender Flächen ist ein sphärisches, centriertes, woraus folgt, dass ausser sämmtlichen Krümmungsmittelpunkten der einzelnen Flächen, auch alle Cardinal- (Fundamental-) punkte, die Haupt-Brennpunkte u. s. w., von denen unten noch speziell die Rede sein wird, auf einer geraden Linie, der optischen Axe des Systems liegen.
2. Die Dimensionen der Objecte und in Folge dessen auch der Bilder sind gegen ihre Abscissen, sowie gegen die Halbmesser der brechenden Flächen als verschwindend klein anzusehen. —

Da der Begriff der verschwindenden Kleinheit, mit dem man sich allerdings bisher stets begnügte, keine genauen Grenzen beziehungsweise Anhaltspunkte an

theoretisch begründete Gesetze enthält, so wollen wir nach dem Vorschlage von Professor Dr. Matthiessen diese zweite Voraussetzung noch dahin präcisieren, dass die Grössen von Object und Bild stets als Differentiale im Sinne der höheren Analysis anzusehen sind, wenn eine ausdrückliche Bezeichnung auch nicht immer angenommen ist. Es wird uns hierdurch ein besonders vorteilhaftes Mittel an die Hand gegeben, diejenigen, im Verlauf einer mathematischen Entwicklung auftretenden Grössen mit Sicherheit zu beurteilen, welche für die weitere Rechnung vernachlässigt werden können, indem die Differential-Rechnung hierüber ganz bestimmte Sätze vorschreibt.

Zu den wertvollsten Erfolgen der dioptrischen Wissenschaft gehört nun zweifellos die Lösung des sogenannten »allgemeinen, dioptrischen Problems«, welche eine vereinfachende Methode zur Untersuchung des Weges von Lichtstrahlen durch eine beliebige Anzahl hintereinander geschichteter, centrierter, brechender Kugelflächen von verschiedenem Brechungsvermögen gefunden hat. Sie zeigt nämlich, in wiefern zwischen dem einfachen Fall einer einzigen brechenden Fläche und dem allgemeinen eines ganzen Systems beliebig vieler Medien eine principielle Analogie hinsichtlich der gegenseitigen, theoretischen Beziehungen zwischen conjugierten Figuren, also hinsichtlich des Ortes, der Grösse und Beschaffenheit der Bilder äusseren Objecte besteht.

Wir verdanken diese hervorragenden Ergebnisse in erster Linie den Forschungen von Moebius, Gauss und Listing, welche in den Jahren 1830—1845 zuerst die hauptsächlichen conjugierten Cardinalpunkte einführten und ihre Bedeutung nachwiesen.

Unter Cardinal- oder Fundamentalpunkten sind feste, auf der optischen Axe gelegene Punkte, beziehungsweise Punktepaare verstanden, welche in das System eintretenden, durch sie hindurch gehenden Strahlen bestimmte Eigenschaften bezüglich des weiteren Verlaufs resp. Austritts aus dem System verleihen.

Die Oerter dieser Punkte sind ausschliesslich Functionen von Constanten des Systems, nämlich den Brechungsindices der einzelnen Medien, den Krümmungsradien und den Abständen der brechenden Flächen, beziehungsweise den hieraus abzuleitenden verschiedenen Arten von »Distanzen« und »Interstitien«. Wir können sie daher im Folgenden als gegeben voraussetzen; doch sei darauf hingewiesen, dass die mathematischen Ausdrücke, welche die Lagen der Cardinalpunkte zu dem System, etwa zu seiner ersten und letzten brechenden Fläche in Beziehung bringen, in ihren jetzigen, verhältnissmässig einfachen und praktisch leicht verwendbaren Formen erst das Ergebniss sehr scharfsinniger und complicierter Untersuchungen gewesen sind. Zuerst hat Gauss in seiner Abhandlung »Dioptrische Untersuchungen« die Orte der Cardinalpunkte dioptrischer Systeme in Form von gewissen Kettenfunctionen allgemein dargestellt; doch blieben seine Arbeiten wegen des schwierigen Verständnisses längere Zeit wenig zugänglich. Professor Matthiessen hat in seinem schönen Werke »Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsensysteme, Leipzig, Teubner 1877« die Gauss'schen Functionen in eine fasslichere Form gebracht und schliesslich in neuerer Zeit nach dem Vorgange des italienischen Physikers Ferraris durch eine neue Darstellung jener Kettenbrüche in Determinanten eine allgemeine verständlichere

zugleich sehr elegante Lösung dieser Probleme herbeigeführt. *)

Von allen Cardinalpunkten **) haben speziell für unsere Untersuchungen einschliesslich der beiden Haupt-Brennpunkte nur die Hauptpunkte und die Knotenpunkte besonderes Interesse.

Die Eigenschaften von Haupt-Brennpunkten, welche schon im Altertum bekannt waren, bedürfen hier keiner besonderen Erläuterung.

Die Hauptpunkte H_α und H_β, beziehungsweise die durch sie senkrecht zur optischen Axe gelegten Ebenen — die erste und zweite Hauptebene — besitzen genau dieselben Eigenschaften, welche bei einer einzigen brechenden Fläche die Scheitelebene in sich vereinigt. Es sind nämlich: erstens alle Punkte der einen Ebene, Bilder der anderen. Die beiden Ebenen sind daher conjugiert, die eine ist das congruente, homothetische Bild der anderen; zweitens ist nachgewiesen, dass die Gleichung der auf sie bezogenen Abscissen von Object und Bild genau die gleiche Form der für eine brechende Fläche aufgestellten Scheitelpunktsgleichung:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

besitzt, wenn auch, wie dort, die Abscissen x_0 und x_1 sowie die Hauptbrennweiten f und φ der Hauptbrennpunkte F und Φ des Systems auf ihre Ebenen bezogen

---

*) Ueber das Nähere vergleiche man: »Beiträge zur Dioptrik der Crystalllinse« von Professor Matthiessen in Berlin - Eversbusch's Zeitschrift für vergleichende Augenheilkunde: Kap. IV und flgde.

**) Man vergleiche: Matthiessen, »Die Prioritätsansprüche verschiedener deutscher Physiker auf Entdeckung der Cardinalpunkte«. Centralzeitung für Optik und Mechanik. Leipzig 1885.

werden. Das Coordinatensystem ist dann natürlich nicht mehr unipolar, sondern bipolar, mit H_α und H_β als Coordinatenanfangspunkten.

Die charakteristische Eigenschaft der Knotenpunkte K_α und K_β besteht darin, dass ein in das System einfahrender, gegen den ersten Knotenpunkt K_α gerichteter Strahl parallel mit diesem derartig austritt, als wenn er aus dem zweiten K_β käme; der Strahl erfährt also keine Richtungsänderung — nur eine parallele Verschiebung. Bei einer einzigen Fläche besitzt der Krümmungsmittelpunkt diese Charakteristik, dass ein gegen ihn gerichteter Strahl ungebrochen hindurchgeht. Eine vollständige theoretische Identität der beiden Knotenpunkte mit dem Krümmungsmittelpunkt wird durch verschiedene Beweise in dioptrischen Werken gezeigt. *)

Die Knotenpunkte sind ferner conjugierte Punkte, die eine Knotenebene ist das homothetische, aber nicht mehr congruente Bild der anderen.

Entsprechend dem Scheitelpunkt und Krümmungsmittelpunkt, liegen die Haupt- und Knotenpunkte symmetrisch gegen die Hauptbrennpunkte des Systems F und Φ.

Aus der Eigenschaft der Knotenpunkte, wonach also jeder Punkt des Bildes mit dem entsprechenden Punkt des Objects in einem parallelen, durch sie gezogenen Strahlenpaar liegt, ziehen wir den wichtigen Schluss, dass für räumliche Figuren das ganze Object und sein Bild je in einer Leitkurve beziehungsweise -polygon durch die sogenannte »erzeugende

*) Der Scheitelpunkt und der Krümmungsmittelpunkt einer einzigen brechenden Fläche sind mithin als Doppelpunkte anzusehen, welche in dem allgemeineren Falle eines Systems zu differenzierten Punkten werden.

Linie« — ligne génératrice — zweier paralleler, congruenter, unendlich dünner Strahlenkegel tangiert werden, deren Spitzen in den beiden Knotenpunkten liegen.

Ferner folgern wir hieraus:

1. Das Bild einer Kurve zweiten Grades muss auch wieder vom zweiten Grade sein;
2. Jede gerade Linie kann in einem nach K_α convergierenden Knotenpunktsstrahlenfächer liegend gedacht werden, zu dem ein paralleler, die Bildlinie enthaltender, und aus K_β divergierender Knotenpunktsstrahlenfächer von gleichem Divergenzwinkel correspondiert.
3. Zur Abbildung eines beliebigen Winkels ist zu berücksichtigen, dass seine Schenkel im allgemeinen in zwei Strahlenfächern liegen, deren conjugierte Fächer denselben Flächenwinkel, gewissermassen eine gleich grosse »Falte« mit einander bilden. —

Hiermit wollen wir die vorauszuschickenden allgemeinen Betrachtungen abbrechen und dazu übergehen, einige nahliegende Probleme zu behandeln.

§ 3.

Conjugierte Punkte in und ausserhalb der optischen Axe.

Die grundlegenden Aufgaben, zu einem axialen und paraxialen Punkt die zugehörigen Bilder darzustellen, sind bereits erschöpfend behandelt; die unter Voraussetzung der Gauss'schen Beschränkungen gefundenen Resultate lassen sich folgendermassen kurz zusammenfassen:

1. Einem in der optischen Axe gelegenen Objectpunkt entspricht ein und nur ein axialer Bildpunkt. Die Abscissen solcher conjugierten Punkte sind an die Refractionsformeln gebunden, von denen die auf die Hauptpunkte*) bezogene Gleichung die Form hat:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

Da die Wurzel x_1 einwertig und in diesem zulässig-näherungsweisen Ausdruck von der Grösse der Amplituden der einzelnen vom Objectpunkt ausgehenden Strahlen unabhängig ist, so folgt hieraus, dass ein homocentrisches Strahlenbündel auch homocentrisch gebrochen werden muss.

2. Zu einem seitwärts von der optischen Axe gelegenen Punkt gehört ebenfalls nur ein paraxialer Bildpunkt. Mit Hülfe des Theorems von Carl Neumann kann die Convergenz aller gebrochenen Strahlen auch für paraxiale Objectpunkte nachgewiesen werden. Man vergleiche hierzu die §§ 6 und 7 von »Matthiessen, Grundriss der Dioptrik«. Dortselbst wird ferner gezeigt, dass für die Abscissen paraxialer, conjugierter Punkte die Refractionsformeln ihre Gültigkeit beibehalten

---

*) Beispielsweise auf die Knotenpunkte bezogen lautet dieselbe Gleichung:

$$\frac{-\varphi}{k_0} + \frac{-f}{k_1} = 1$$

wo k_0 und k_1 die auf K_α beziehungsweise K_β bezüglichen Abscissen bedeuten.

und dass für die hinzugekommenen Ordinaten die Gleichungen:

$$\frac{Y_0}{Y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi - x_1}{\varphi} = \frac{x_0 - f - \varphi}{x_1 - f - \varphi} = -\frac{\varphi}{f}\frac{x_0}{x_1} = \frac{k_0}{k_1}$$

die entsprechenden Relationen liefern.

§ 4.

Die Bildlinie der die optische Axe schneidenden, übrigens beliebig geneigten Geraden.

Wir schlagen einen Weg ein, auf welchen Professor Matthiessen zuerst auf Grund eigener, neuerer Forschungen hingewiesen hat. Die Discussion über die Beschaffenheit der entstehenden Bildlinie ist von ihm bereits früher geführt und im § 8 des »Grundrisses« dargelegt. Dortselbst wird mittelst der für die Bildlinie resultierenden Gleichung ersten Grades:

$$\frac{Y_1}{t_1} = \operatorname{tg} \alpha_1 \text{ (Constante)}$$

der Beweis erbracht, dass eine die optische Axe schneidende Gerade sich stets wieder als gerade Linie abbildet. Es erübrigt noch, diejenigen Relationen auszudrücken, welche bestehen, einmal zwischen den Längen von Object und Bild, R_0 und R_1, vgl. Fig. 1 der beigefügten Tafel und zweitens zwischen den Winkeln α_0 und α_1, unter welchen jene beziehungsweise gegen die optische Axe geneigt sind. Liegt, wie angenommen werden soll, R_0 in der Ebene der Tafel, so gilt dies auch für R_1. Nach der zweiten Voraussetzung müssen wir R_0 und R_1

als verschwindend kleine Grössen gegen die Abscissen von L_0 und L_1 ansehen; in folgedessen werden:

$$\overline{L_0 N_0} = \mathrm{d}x_0 \ , \quad \overline{L_1 N_1} = \mathrm{d}x_1 \ ,$$

und die Ordinaten Y_0 und Y_1 von P_0 und P_1 sind genauer als $\mathrm{d}Y_0$ und $\mathrm{d}Y_1$ einzuführen.

Nach der Ordinatengleichung besteht nun für P_0 und P_1 die Beziehung:

$$\frac{\mathrm{d}Y_0}{\mathrm{d}Y_1} = \frac{-\varphi\,(x_0 + \mathrm{d}x_0)}{f(x_1 + \mathrm{d}x_1)} \ ,$$

oder, da $\mathrm{d}x_0$ und $\mathrm{d}x_1$ zwar nicht gegen die Dimensionen der abzubildenden Objecte, wohl aber gegen die Abscissen x_0 und x_1 vernachlässigt werden können, so wird:

$$\frac{\mathrm{d}Y_0}{\mathrm{d}Y_1} = \frac{-\varphi\, x_0}{f\, x_1}$$

oder:

$$\frac{R_0 \sin \alpha_0}{R_1 \sin \alpha_1} = \frac{-\varphi\, x_0}{f\, x_1} \qquad 1)$$

In dieser Gleichung, welche uns das Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Längen von Object und Bild geben soll, müssen x_0 und x_1 der Refractionsformel:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

genügen, während die Winkel α_0 und α_1 an eine Relation gebunden sind, welche sich folgendermassen kurz ableiten lässt:

Es wird durch Differentiation der Gleichung:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

$$-\frac{f\,\mathrm{d}x_0}{{x_0}^2} + \frac{-\varphi\,\mathrm{d}x_1}{{x_1}^2} = 0 \ ;$$

Nun ist:

$$dx_0 = R_0 \cos \alpha_0 ; \quad dx_1 = R_1 \cos \alpha_1 ;$$

mithin wird:

$$\frac{R_0 \cos \alpha_0}{R_1 \cos \alpha_1} = \frac{-\varphi {x_0}^2}{f {x_1}^2} ,$$

und durch Divison in Gleichung 1) resultiert:

$$x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 , \quad \cdots \qquad 2)$$

eine Gleichung, welche ihrer Einfachheit wegen mit Vorteil bei den weiteren Untersuchungen verwandt worden ist und wie Gleichung 1) von Professor Matthiessen herrührt.

Unter der Annahme, dass das Object vor, das Bild hinter dem dioptrischen System gelegen ist, also x_0 = negativ, x_1 = positiv, folgt hieraus:

Für α_0 im I. Quadranten, liegt α_1 im IV. Quadranten,
„ α_0 „ II. „ „ α_1 „ III. „
u. s. w.

Für $\alpha_0 = 90^0$, wird auch $\alpha_1 = 90^0$: Object und Bild stehen senkrecht zur optischen Axe; für $\alpha_0 = 0^0$, wird auch $\alpha_1 = 0^0$: Object und Bild liegen in der optischen Axe. (Bilddicke.)

§ 5.

Abbildung der beliebig gerichteten Ebene.

Im Folgenden haben wir einige Sätze aus der sphärischen Trigonometrie benutzt, deren Beweise im »Lehrbuch der Geometrie« von Heis und Eschweiler Kap. V gegeben sind.

Eine Ebene von beliebiger Lage werde auf zwei durch die optische Axe des Systems gelegte, zu einander senkrechte Axenschnitte bezogen, von denen der eine etwa entsprechend der X-Y = Ebene eines recht-

winkligen räumlichen Coordinatensystems ein Horizontalaxenschnitt, der andere entsprechend der X-Z = Ebene ein Verticalaxenschnitt sei. Die Ebene ist dann festgelegt durch den Schnittpunkt O_0 mit der optischen Axe, vgl. Fig. 2 durch den Winkel c_0, unter welchem ihre Schnittlinie mit der Horizontalebene gegen die optische Axe gerichtet ist und durch ihre Neigung β_0 zur Horizontalebene.

Beschreibt man mit einem beliebigen Radius r_0 um O_0 eine Kugelfläche, so schneidet diese die Objectebene, sowie die beiden Axenebenen in Kreisen, von denen drei Bögen das rechtwinklige sphärische Dreieck $A_0\ B_0\ C_0$ ausmachen. Dasselbe ist aus den bekannten Stücken c_0 und β_0 berechnen; die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} b_0 = \operatorname{tg} \beta_0 \sin c_0$$

$$\operatorname{tg} a_0 = \frac{\operatorname{tg} c_0}{\cos \beta_0}$$

$$\cos \gamma_0 = \frac{\operatorname{tg} \beta_0}{\operatorname{tg} a_0}$$

ergeben beziehungsweise b_0, a_0 und γ_0.

Von der Objectebene fassen wir einstweilen den Teil $B_0\ O_0\ C_0$ (Kreissector) ins Auge. Die nach Gleichung 2) des vorigen Paragraphen bestehenden Beziehungen:

$$x_0 \operatorname{tg} b_0 = x_1 \operatorname{tg} b_1$$
$$x_0 \operatorname{tg} c_0 = x_1 \operatorname{tg} c_1$$

liefern die resp. in der verticalen und horizontalen Axenebene gelegenen Bildstücke b_1 und c_1. Durch die freien Schenkel dieser Winkel legen wir eine Ebene; beschreiben wir dann um O_1 mit einem wiederum beliebigen Halbmesser r_1 eine Kugelfläche, so entsteht ebenfalls ein rechtwinkliges, sphärisches Dreieck

$A_1\ B_1\ C_1$.*) Nach analogen Gleichungen wie oben ist dieses aus den bekannten Teilen b_1 und c_1 zu berechnen

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\operatorname{tg} b_1}{\sin c_1}$$

$$\operatorname{tg} a_1 = \frac{\operatorname{tg} c_1}{\cos \beta_1}$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{\operatorname{tg} b_1}{\operatorname{tg} a_1} \ . \ -$$

Zur Präcisierung der weiteren Untersuchungen können wir bis jetzt über die Lage und Beschaffenheit der Bildfläche aussagen, dass dieselbe erstens wie die oben zur Vervollständigung der zu $O_0\ A_0\ B_0\ C_0$ conjugierten Ecke $O_1\ A_1\ B_1\ C_1$ gelegte Ebene durch die Geraden $\overline{O_1 B_1}$ und $\overline{O_1 C_1}$ hindurchgehen muss. Zweitens lassen sich beliebig viele von O_0 radial auslaufende, in der Objectebene gelegene gerade Linien denken, denen nach § 4 ebenfalls geradlinige Bilder entsprechen müssen, welche ihrerseits von O_1 centrisch ausgehen und in ihrer Gesammtheit natürlich die Bildfläche bilden.

Dieses letzte Moment trägt in sofern wesentlich zur Vereinfachung unserer Betrachtungen bei, als es die Möglichkeit einer ganz allgemein gekrümmten Bildfläche ausschliesst und nur noch die einer kegelmantelartigen Fläche mit O_1 als Kegelspitze zulässt.

Um daraufhin die Bildfläche zu prüfen, ziehen wir den um einen ganz beliebig angenommenen Winkel φ_0 fortgesetzten Teil $C_0\ O_0\ D_0$ der Objectebene in unsere

*) Der Deutlichkeit wegen sind in der Figur auch die Bildpunkte A_2, B_2, C_2 der Objectpunkte A_0, B_0, C_0 angegeben; sie liegen auf den entsprechenden parallelen Knotenpunktsstrahlen, haben aber für die vorliegenden Betrachtungen kein weiteres Interesse.

Untersuchungen hinein. φ_0 und b_0 lassen sich zu dem schiefwinklig-sphärischen Dreieck $A_0\ C_0\ D_0$ ergänzen, welches aus den drei bekannten Stücken φ_0, b_0 und $\delta_0 = 180^0 - \gamma^0$ zu berechnen ist. Nach dem Cosinus-Satz wird nämlich:

$$\cos d_0 = \cos \varphi_0 \cos b_0 + \sin \varphi_0 \sin b_0 \cos \delta_0$$

oder auch:

$$\cos d_0 = \cos \varphi_0 \cos b_0 - \sin \varphi \sin b_0 \cos \gamma_0$$

und:

$$\cos \varphi_0 = \cos b_0 \cos d_0 + \sin b_0 \sin d_0 \cos \varepsilon_0 ,$$

woraus d_0 und ε_0 bestimmbar sind.

Die zu d_0 conjugierte Grösse d_1 deren Lage durch den d_0 entsprechenden, parallelen Knotenpunktsstrahlenfächer bekannt ist, folgt aus der Bedingung:

$$x_0 \operatorname{tg} d_0 = x_1 \operatorname{tg} d_1 ;$$

Wir legen auch durch $\overline{O_1\ C_1}$ und $\overline{O_1\ D_1}$ eine Ebene; in dem wiederum schiefwinkligen sphärischen Dreieck $A_1\ C_1\ D_1$ ist der Winkel $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$.

Mit Anwendung des Satzes »zwischen vier auf einander folgenden Stücken eines sphärischen Dreiecks«, vgl. Heis und Eschweiler Seite 111, wird:

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\operatorname{tg} d_0 \sin \varepsilon_0}{\sin b_0 - \operatorname{tg} d_0 \cos b_0 \cos \varepsilon_0} ,$$

oder:

$$\operatorname{tg} \delta_0 \cos b_0 = \frac{\operatorname{tg} d_0 \sin \varepsilon_0}{\operatorname{tg} b_0 - \operatorname{tg} d_0 \cos \varepsilon_0}$$

Ganz analog ergiebt sich auch:

$$\operatorname{tg} \delta_1 \cos b_1 = \frac{\operatorname{tg} d_1 \sin \varepsilon_1}{\operatorname{tg} b_1 - \operatorname{tg} d_1 \cos \varepsilon_1}$$

$$= \frac{\frac{x_0}{x_1} \operatorname{tg} d_0 \sin \varepsilon_0}{\frac{x_0}{x_1} \operatorname{tg} b_0 - \frac{x_0}{x_1} \operatorname{tg} d_0 \cos \varepsilon_0}$$

d. h. $\operatorname{tg} \delta_1 \cos b_1 = \operatorname{tg} \delta_0 \cos b_0$.

Nun ist: $\operatorname{tg} \delta_0 = \operatorname{tg} (180 - \gamma_0) = - \operatorname{tg} \gamma_0$,

mithin:

$$\operatorname{tg} \delta_1 \cos b_1 = - \operatorname{tg} \gamma_0 \cos b_0 = - \frac{\operatorname{tg} c_0}{\sin b_0} \cos b_0$$

$$= - \frac{\operatorname{tg} c_0}{\operatorname{tg} b_0} = - \frac{\frac{x_1}{x_0} \operatorname{tg} c_1}{\frac{x_1}{x_0} \operatorname{tg} b_1} ;$$

oder:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = - \frac{\operatorname{tg} c_1}{\sin b_1} = - \operatorname{tg} \gamma_1$$

d. h. $\underline{\delta_1 = 180^0 - \gamma_1 ;}$

analog:

$$\delta_0 = 180^0 - \gamma_0 .$$

Unter Beachtung, dass φ_0 vollkommen willkürlich gewählt wurde, dass also stets ein gleiches Resultat zu gewärtigen ist, welche beliebig grossen Zusatzstücke $O_0 C_0 D_0$ der Objectebene auch eingeführt werden, ist einleuchtend, dass die angenommene Kegelmantelfläche $B_1 C_1 D_1 O_1$ nur eben sein kann.

Wir sind somit zu dem wichtigen Ergebniss gelangt:

»Das Bild jeder beliebig gelegenen Ebene ist unter Voraussetzung der vorangestellten Beschränkungen wieder eine Ebene«.

§ 6.

Das Bild der zur optischen Axe windschiefen Geraden.

Zur Vervollständigung des Problems der geraden Linie wollen wir noch den allgemeineren Fall betrachten, für welchen die Gerade die optische Axe ganz beliebig paraxial kreuzt; wir nehmen dabei auf die vorangegangenen Paragraphen Bezug.

Die Beschaffenheit der Bildlinie folgern wir aus § 5, da jede Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen angesehen werden kann; demnach muss das Bild der beliebigen Objectgeraden auch der Schnittlinie zweier Ebenen entsprechen d. h. ebenfalls eine gerade Linie sein.

Weiter wissen wir nach § 2 Folgerung 2) dass Object- und Bildgerade in conjugierten Knotenpunktsstrahlenfächern gelegen sind, R_0 und R_1, vgl. Fig. 3 also parallelen Strahlenfächern von gleichem Divergenzwinkel angehören.

Wegen des vorausgesetzten sehr geringen seitlichen Abstandes des Objects und Bildes von der optischen Axe entstehen bei Betrachtung der Längen $\overline{H_1 L_0}$ und $\overline{H_2 L_1}$ unendlich kleine Grössen höherer Ordnung gegenüber ihren Projectionen auf die optische Axe: $\overline{H_\alpha N_0} = x_0$ $\overline{H_\beta N_1} = x_1$.

Unter Vernachlässigung derselben darf man mithin setzen: $\overline{H_1 L_0}$ gleich gross x_0, $\overline{H_2 L_1}$ gleich gross x_1.

Es bleiben in Folge dessen die im § 4 gefundenen Relations-Gleichungen:

1) $$\frac{R_0 \sin \alpha_0}{R_1 \sin \alpha_1} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1}$$

2) $$x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

überhaupt auch für conjugierte Geraden gültig, welche, beziehungsweise deren Neigungswinkel α_0 und α_1 auf zwei parallele Knotenpunktsstrahlen — hier $\overline{L_0 K_\alpha}$, $\overline{K_\beta L_1}$ — bezogen worden sind; als Abscissenwerte x_0 und x_1 gelten diejenigen Entfernungen, welche die Schnittpunkte von Object und Bild mit jenen Knotenpunktsstrahlen von den beiden Hauptebenen haben.

§ 7.

Bild des in einer Knotenpunktsstrahlenebene sowie senkrecht zum Knotenstrahl paraxial gelegenen Kreises. — Bild einer Kugel.

Durch den Mittelpunkt O_0 eines in einer Knotenpunktsstrahlenebene gelegenen Kreises, vgl. Fig. 4 ziehen wir den Knotenstrahl $\overline{O_0 K_\alpha}$; der Bildpunkt O_1 liegt auf $\overline{K_\beta O_1} \mid \overline{O_0 K_\alpha}$, die gesammte Bildfigur in dem Strahlenfächer, welcher durch $\overline{K_\beta O_1}$ parallel zur Object-Strahlenebene gelegt ist.

Der Deutlichkeit wegen sind in der Figur die beiden Strahlenfächer mit der Tafelebene zusammenfallend gedacht.

Ist nun $\overline{O_0 P_0} = r_0$ ein beliebiger Kreishalbmesser, welcher mit $\overline{O_0 K_\alpha}$ den Winkel α_0 einschliesst, $\overline{O_1 P_1} = \varrho$ sein Bild, gegen den zugehörigen Knotenstrahl $\overline{K_\beta O_1}$ unter α_1 geneigt, so bestehen zwischen r_0 und ϱ einerseits, sowie α_0 und α_1 andererseits die bekannten Beziehungen:

1) $$\frac{r_0 \sin \alpha_0}{\varrho \sin \alpha_1} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1}$$

2) $$x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

Ebenso wie P_0, während α_0 die Werte von 0° bis 360° durchläuft, die Objectfigur beschreibt, muss auch P_1 die Bildfigur beschreiben, indem mit r_0 auch ϱ eine volle Umdrehung macht; wir können ϱ als den allgemein veränderlich anzunehmenden polaren radius vector der Bildfigur ansehen. Die Discussion der letzteren führen wir folgendermassen:

Durch Quadrieren der Gleichung (1) wird:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha_0} = \frac{f^2 x_1^2 r_0^2}{(-\varphi)^2 x_0^2 \varrho^2 \sin^2 \alpha_1},$$

ebenso folgt aus Gleichung (2):

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha_0 = \frac{x_0^2}{x_1^2} \operatorname{cotg}^2 \alpha_1$$

Da nun:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha_0 = \frac{1}{\sin^2 \alpha_0} ,$$

so wird:

$$1 + \frac{x_0^2}{x_1^2} \operatorname{cotg}^2 \alpha_1 = \frac{f^2 x_1^2 r_0^2}{(-\varphi)^2 x_0^2 \varrho^2 \sin^2 \alpha_1} .$$

Durch Ausmultiplicieren und nach einigen Umformungen ergiebt sich hieraus:

$$\varrho^2 - \cos^2 \alpha_1 \varrho^2 + \cos^2 \alpha_1 \frac{x_0^2}{x_1^2} \varrho^2 = \frac{f^2 x_1^2 r_0^2}{x_0^2 (-\varphi)^2}$$

oder:

$$\varrho = \frac{x_1 f r_0}{x_0 (-\varphi)} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 \left(1 - \frac{x_0^2}{x_1^2}\right)}} .$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse in Polarcoordinaten ϱ und α_1, mit dem Mittelpunkt O_1.

Zur Ermittlung der beiden Hauptaxen und ihrer Lage, verschaffen wir uns eine Relation zwischen α_0 und ϱ_1 um zu prüfen, welche Werte von α_0 ϱ zu einem Maximum und Minimum machen.

Dividiert man die Gleichungen 1) und 2) durch einander, so erhält man:

$$\frac{x_0^2 \operatorname{tg} \alpha_0 (-\varphi)}{r_0 \sin \alpha_0} = \frac{x_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 f}{\varrho \sin \alpha_1} ,$$

oder:

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1^2 f r_0 \cos \alpha_0}{x_0^2 (-\varphi) \varrho}$$

Zur Abkürzung mögen die constanten Ausdrücke:

$$\frac{x_1^2 f r_0}{x_0^2 (-\varphi)} \text{ und } \frac{x_1 f r_0}{x_0 (-\varphi)}$$

beziehungsweise mit a und b bezeichnet werden.

Es ist dann:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a}{\varrho} \cos \alpha_0$$

und der oben für ϱ gefundene Wert schreibt sich einfacher:

$$\varrho = b \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}}$$

oder $\cos \alpha_1$ eingesetzt:

$$\varrho = \sqrt{b^2 + \cos^2 \alpha_0 \, (a^2 - b^2)}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass je grösser $\cos^2 \alpha_0$, also je kleiner α_0, desto grösser ϱ wird und umgekehrt. Es wird demnach ϱ zu einem Maximum (halbe grosse Hauptaxe) für $\cos \alpha_0 = 1$; $\alpha_0 = 0$ und zu einem Minimum für $\cos \alpha_0 = 0$; $\alpha_0 = 90^0$. Da schliesslich für $\alpha_0 = 0$ auch $\alpha_1 = 0$, für $\alpha_0 = 90^0$ auch $\alpha_1 = 90^0$ so fällt die grosse Hauptaxe der Ellipse mit dem Knotenstrahl $\overline{K_\beta O_1}$ zusammen, und die Hälfte ihres Betrages ist:

$$\varrho_{\max} = a = \frac{x_1^2 f r_0}{x_0^2 (-\varphi)} ;$$

die kleine Hauptaxe steht senkrecht auf $K_\beta O_1$; die Hälfte ihres Betrages wird:

$$\varrho_{\min} = b = \frac{x_1 f r_0}{x_0 (-\varphi)} .$$

Besonders einfach gestaltet sich das Bild eines senkrecht zum Knotenpunktsstrahl gelegenen Kreises.

Da sämmtliche Halbmesser des Objects r_0 vgl. Fig. 5 mit $O_0 K_\alpha$ einen rechten Winkel bilden, so müssen auch alle einzelnen Bilder ϱ senkrecht zu $K_\beta O_1$ stehen. Setzt man demnach in der Gleichung:

$$\frac{r_0 \sin \alpha_0}{\varrho \sin \alpha_1} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1}$$

$$\alpha_0 = 90^0 = \alpha_1 ,$$

so folgt:

$$\varrho = \frac{f x_1 r_0}{(-\varphi) x_0} = \text{Constante};$$

die Bildfigur ist mithin ein zum conjugierten Knotenstrahl ebenfalls normal stehender Kreis, dessen Radius vom Radius des Objects um das Verhältniss $\frac{f x_1}{(-\varphi) x_0}$ verändert ist. —

Im Anschluss an das erste Kreisproblem, wollen wir noch das Bild einer beliebig paraxial liegenden Kugel angeben.

Das gleiche, oben gefundene Resultat gilt für sämmtliche Object-Kreise, Fig. 4, welche um den Knotenstrahl $O_0 K_\alpha$ herum mit O_0 als Mittelpunkt und $M_0 N_0 = 2 r_0$ als Durchmesser beschrieben werden. Denkt man sich beliebig viele solcher Kreise gezogen, so erhält man als Bilder derselben lauter congruente Ellipsen, welche mit $M_1 N_1$ als gemeinschaftlicher grosser Hauptaxe rings um $K_\beta O_1$ in dem jedesmalig-zugehörigen Strahlenfächer gelegen sind. Die Gesammtheit aller Kreise ist aber eine Kugelfläche, als deren Bild sich die Gesammtheit der Ellipsen d. h. ein Rotationsellipsoid ergiebt. Die halben Hauptaxen dieses Bildellipsoides haben nach obigem die Werte:

$$a = \frac{x_1^2 f r_0}{x_0^2 (-\varphi)} \; ; \quad b = c = \frac{x_1 f r_0}{x_0 (-\varphi)} .$$

Interessant ist ein Spezialfall, welcher eintritt, wenn $x_0 = x_1$; alsdann wird nämlich $a = b = c = \frac{f r_0}{(-\varphi)}$ d. h. die Bildfigur der Kugel ist wieder eine Kugel mit einem Halbmesser, welcher gegen denjenigen der Objectkugel um $f : \varphi$ variiert.

Gemäss der Gleichung:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

tritt dieser Fall beispielsweise ein, wenn $x_0 = f + \varphi$ ist, d. h. der Mittelpunkt der Objectkugel im ersten Knotenpunkt K_α liegt; es wird dann auch $x_1 = f + \varphi$, der Mittelpunkt der Bildkugel liegt im zweiten Knotenpunkt K_β . —

§ 8.

Bild der in einer Knotenpunktsstrahlenebene gelegenen Ellipse. — Bild eines Rotationsellipsoides, deren grosse Axe mit einem Knotenpunktsstrahl zusammenfällt.

Wir behandeln diese Aufgabe in ähnlicher Weise, wie diejenige des Kreises.

Um zu möglichst einfachen, mathematischen Beziehungen zu gelangen, wollen wir die eine Hauptaxe der Ellipse, z. B. die grosse $= 2 a_0$ vgl. Fig. 6, mit dem Knotenpunktsstrahl $\overline{O_0 K_\alpha}$, der wie beim Kreise durch den Mittelpunkt O_0 der Objectfigur gezogen worden ist, zusammenfallend voraussetzen. Der allgemeinere, vom Verf. auch durchgeführte Fall, bei welchem eine Hauptaxe unter einem willkürlichen Winkel gegen den Knotenpunktsstrahl geneigt ist, führt zu

weitläufigeren mathematischen Entwicklungen, ohne im Princip ein anderes Resultat zu bringen.

Die kleine Hauptaxe der Ellipse sei $= 2\,b_0$.

Ist nun wieder $\overline{O_0 P_0} = \varrho_0$ ein beliebiger Mittelpunktsradius vector der Objectfigur, unter dem Winkel α_0 gegen $\overline{O_0 K_\alpha}$ geneigt, $\overline{O_1 P_1} = \varrho_1$ der conjugierte radius vector der Bildfigur, welcher entsprechend den Winkel α_1 mit $\overline{K_\beta O_1}$ bildet, so gelten wie früher:

1) $$\frac{\varrho_0 \sin \alpha_0}{\varrho_1 \sin \alpha_0} = \frac{-\varphi x_0}{f x_1}$$

2) $$x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

Zum Unterschied vom Kreisproblem ist jedoch ϱ_0 hier nicht mehr constant, und muss daher als eine Function der anderen variabelen Grösse α_0 ausgedrückt werden. Gemäss der Ellipsen-Gleichung in Mittelpunkts-Polarcoordinaten ist:

$$\varrho_0 = b_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{{b_0}^2}{{a_0}^2}\right) \cos^2 \alpha_0}},$$

worin a_0 b_0 und α_0 in Uebereinstimmung mit den oben gewählten Bezeichnungen eingeführt sind.

Aus Gleichung 2) folgt:

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{{x_0}^2}{{x_0}^2 + {x_1}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}$$

und:

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{{x_1}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{{x_0}^2 + {x_1}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}.$$

Quadriert man Gleichung 1) und setzt die Ausdrücke für $\sin^2 \alpha_0$, ${\varrho_0}^2$ und in letzterem den für $\cos^2 \alpha_0$ ein, so ergiebt sich:

$$\frac{a_0^2 b_0^2}{a_0^2 - \frac{(a_0^2 - b_0^2) x_0^2}{x_0^2 + x_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} \cdot \frac{x_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}{x_0^2 + x_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1} \cdot \frac{1}{(-\varphi)^2 x_0^2} =$$

$$= \frac{\varrho^2 \sin^2 \alpha_1}{f^2 x_1^2} ;$$

oder:

$$\varrho_1^2 = \frac{x_1^2 f^2 b_0^2}{x_0^2 (-\varphi)^2} \cdot \frac{a_0^2 x_1^2}{a_0^2 x_1^2 \sin^2 \alpha_1 + b_0^2 x_0^2 \cos^2 \alpha_1}$$

$$= \frac{x_1^2 f^2 b_0^2}{x_0^2 (-\varphi)^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha_1 (a_0^2 x_1^2 - b_0^2 x_0^2)}$$

$$\varrho_1 = \frac{x_1 f b_0}{x_0 (-\varphi)} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 \left(1 - \frac{x_0^2 b_0^2}{x_1^2 a_0^2}\right)}}$$

d. h. das Bild der betrachteten Ellipse stellt sich wieder als Ellipse dar.

Man findet durch Aufstellung einer Relation zwischen α_0 und ϱ_1, dass die grosse und kleine Hauptaxe in beziehungsweise senkrecht zum Knotenpunktsstrahl $\overline{K_\beta O_1}$ liegen, und als ihre halben Werte:

$$a_1 = \frac{x_1^2 f a_0}{x_0^2 (-\varphi)} ; \quad b_1 = \frac{x_1 f b_0}{x_0 (-\varphi)} .$$

Wie aus dem Bild des Kreises dasjenige einer Kugel gefolgert wurde, so lässt sich auch das Bild eines Rotationsellipsoides, dessen Hauptaxe, z. B. die grosse mit dem Knotenpunktsstrahl zusammenfällt, bestimmen: wir erhalten wieder ein Rotationsellipsoid mit den Hauptaxen a_1, b_1, $c_1 = b_1$.

In dem Spezialfall $x_0 = f + \varphi = x_1$ liegen die conjugierten Ellipsoide mit ihren Mittelpunkten O_0 O_0 in den beiden Knotenpunkten K_α, K_β, und zwar ist das

Bildellipsoid seinem Object ähnlich im Verhältniss $f : \varphi$.

§ 9.

Abbildung einer allgemeinen ebenen Kurve. — Hinweis auf die Abbildung beliebig gekrümmter Flächen.

Bisher haben wir an der Hand einiger herausgegriffener Beispiele von ebenen geometrischen Linien gezeigt, in welcher Weise die durch ein System brechender Medien entstehenden Bilder solcher Objectfiguren bestimmt werden können. Die dabei zu Grunde gelegten Gleichungen ermöglichen aber ebenso die Lösung eines ganz allgemeinen Problems, einer beliebigen, zunächst ebenen, in einem Knotenpunktsstrahlenfächer gelegenen Kurve L_0, vgl. Fig. 7; entsprechend ihrem Gesetz muss dabei nur die Beziehung festgestellt werden, welche zwischen einem radius vector sowie dem von ihm und dem geeignet gezogenen Knotenpunktsstrahl $\overline{O_0 K_\alpha}$ gebildeten Winkel besteht. Demgemäss gilt für L_0 allgemein: $\varrho_0 = f(\varphi_0)$.

Setzt man in der ersten der Relationsgleichungen an Stelle von ϱ_0 diese Function, so hat man zwei Gleichungen:

1) $$\frac{f(\varphi_0) \sin \varphi_0}{\varrho_1 \sin \varphi_1} = \frac{-\varphi\, x_0}{f\, x_1}$$

2) $$x_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = x_1 \operatorname{tg} \varphi_1$$

aus denen durch Eliminieren von φ_0 stets eine eindeutig bestimmbare dritte Gleichung resultiert, welche den radius vector ϱ_1 der Bildkurve L_1 als $F(\varphi_1)$, dem Neigungswinkel von ϱ_1 mit dem $\overline{O_0 K_\alpha}$ entsprechenden Strahl $\overline{K_\beta O_1}$ enthält, mithin die Bildkurve selbst kennzeichnet. —

Zum Schluss mag noch darauf hingewiesen sein, dass auch die dioptrische Abbildungsmethode von Flächen, welche nicht wie in obiger Weise durch Rotation einer erzeugenden ebenen Kurve entstehen, sondern allgemein und beliebig gekrümmt verlaufen, auf den Gleichungen 1) und 2) basieren, da in den für Object- und Bild- radius vector allgemein geltenden Functionen:

$$\varrho_0 = f(\varphi_0 , \varepsilon_0) : \varrho_1 = F(\varphi_1 , \varepsilon_1) ,$$ vgl. Fig. 8.

ε_0 stets gleich ε_1 ist.

Beim Abschluss meiner Abhandlung verfehle ich nicht, Herrn Professor Dr. L. Matthiessen auch an dieser Stelle den aufrichtigsten Dank auszusprechen für die gütige Ueberlassung dieses Thema's sowie für die unermüdliche Liebenswürdigkeit, mit welcher ich bei der Ausführung meiner Arbeiten unterstützt worden bin.

Vita.

Curd Winter, Sohn des Oberstlieutenants z. D. Winter in Schwerin i./M., evangelischer Cofession, wurde am 10. Juni 1870 zu Blankenburg a./Harz geboren.

Seine humanistische Bildung erhielt er auf den Gymnasien zu Metz, Braunschweig und Schwerin, welch' letzteres er zu Ostern 1891 mit dem Zeugniss der Reife in der Absicht verliess, das Staatsbaufach zu ergreifen. Er studierte auf den technischen Hochschulen zu Braunschweig, München und Berlin, bestand im November 1893 die Vorprüfung und im Juni 1896 vor dem Königl. techn. Prüfungsamt zu Berlin die erste Staatsprüfung.

Am 23. Juli 1896 ernannte ihn die Königl. Eisenbahn-Direktion Altona zum Regierungsbauführer.

Während eines längeren im W.-S. 1896/97 genommenen Urlaubes war er an der Universität Rostock immatriculiert, woselbst er die Vorlesung von Professor Dr. Matthiessen über »Graphische Optik« hörte und im physicalischen und geologischen Institut praktisch arbeitete.

Figur 2.

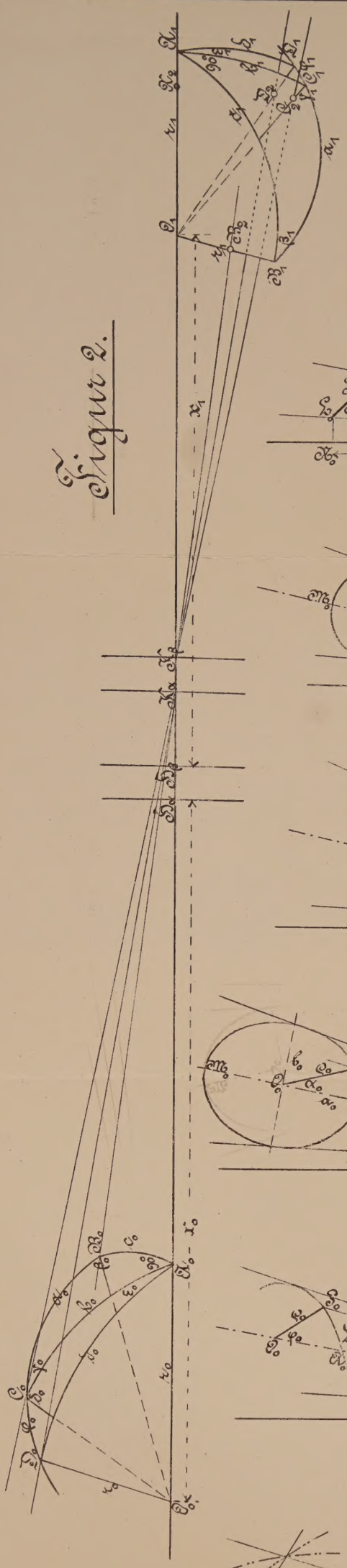


Fig. 1.

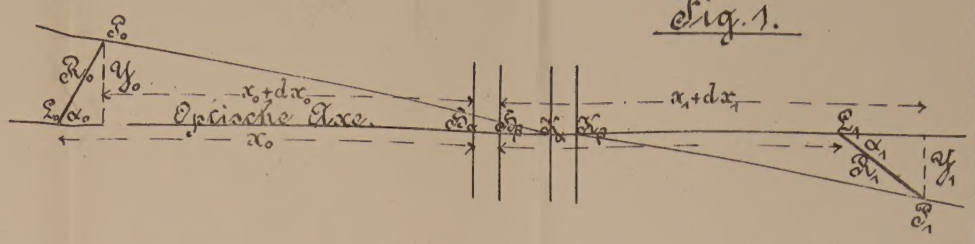


Fig. 3.

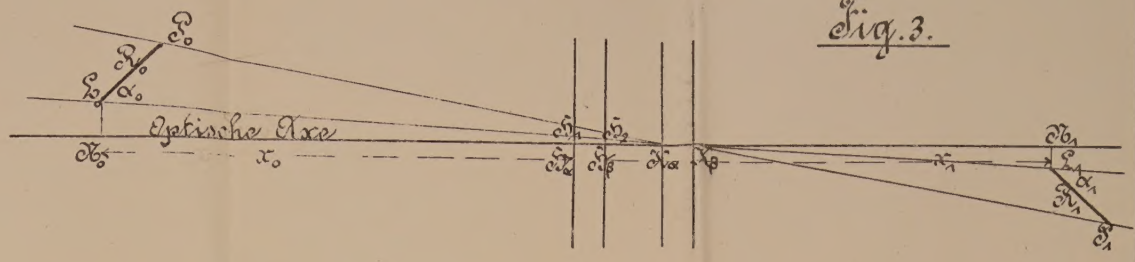


Fig. 4.

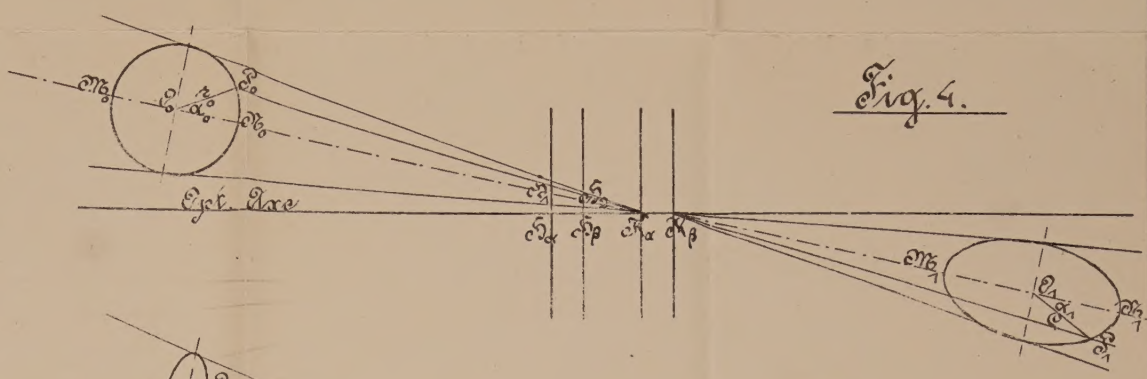


Fig. 5.

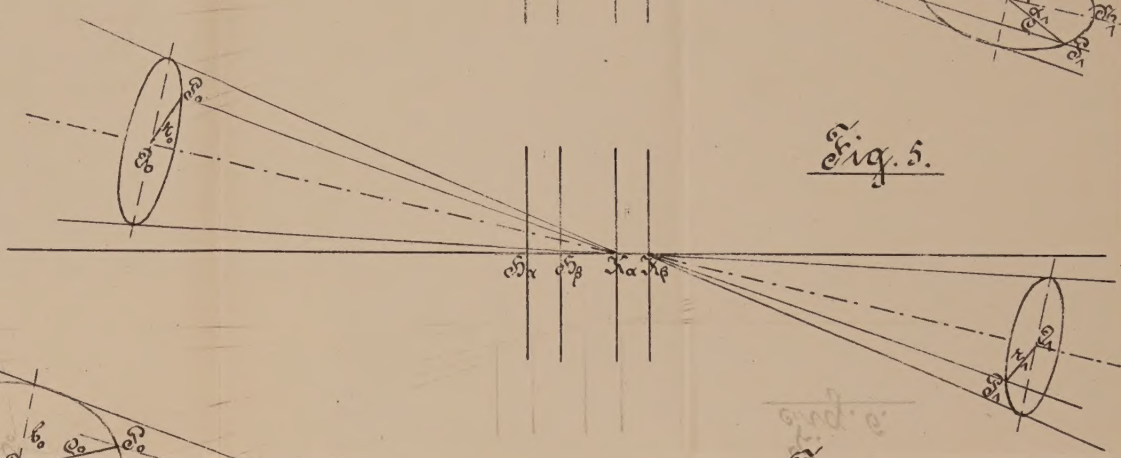


Fig. 6.

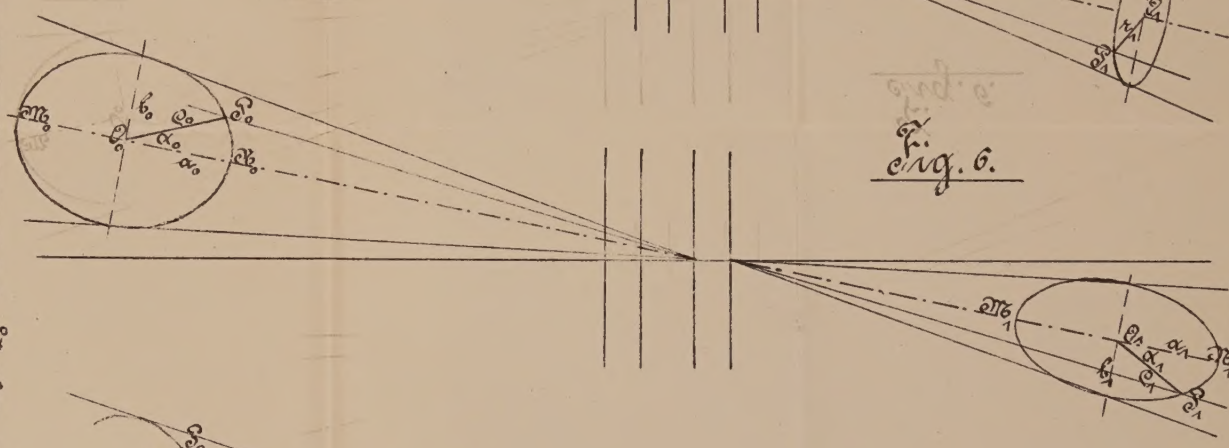


Fig. 7.

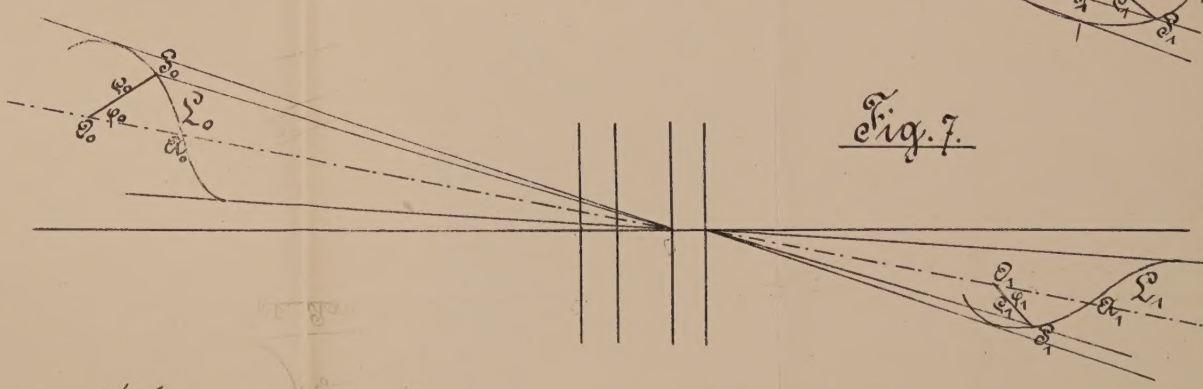
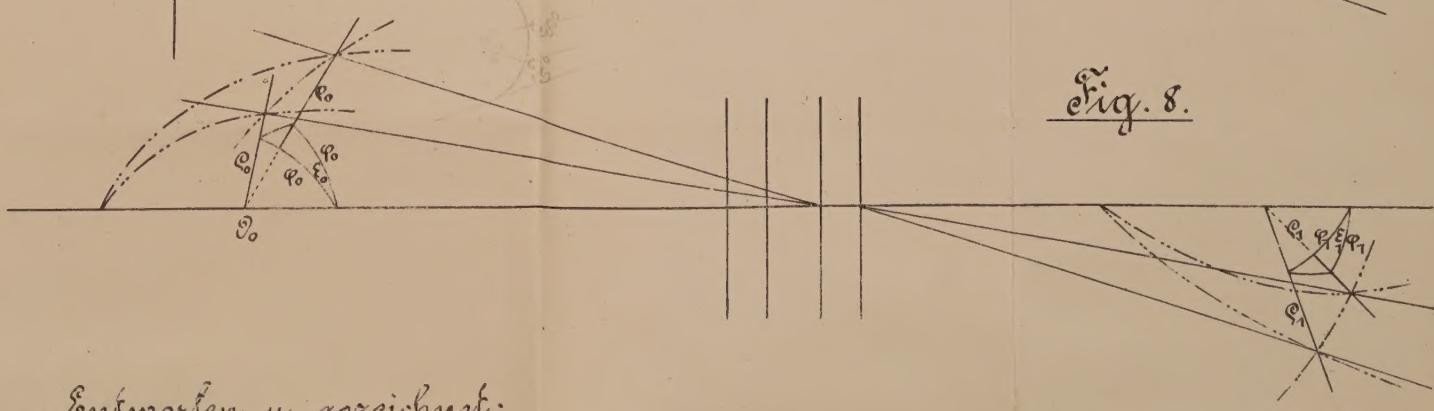


Fig. 8.



Entworfen u. gezeichnet:
Flensburg, April 1897.

Curd Winter.